

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Введение

Арьков Валентин Юльевич

- Профессор кафедры АСУ
- Кабинет: 6-215А
- Сайт: <http://arkov.narod.ru>
- Почта: [valentin-arkov \[at\] yandex.ru](mailto:valentin-arkov@yandex.ru)
- Приемная каф.АСУ: 6-322

Вычислительная математика

- Занятия
 - Лекции
 - Практика
 - Лабораторные работы
- Зачет

Литература

- **Амосов** Вычислительные методы для инженеров
- **Вержбицкий** Основы численных методов
- **Боглаев** Вычислительная математика и программирование
- **Демидович** Основы вычислительной математики
- **Воеводин** Параллельные вычисления
- **Кнут** Искусство программирования
- **Алексеев** Scilab: Решение инженерных и математических задач (<http://www.altlinux.org/Books:Scilab>)
- **Press** Numerical Recipes (<http://nr.com>)
- **Мэтьюз** Численные методы. Использование Matlab

Вычислительная математика

- «Вычисления» + «Математика»
- Вычисления, расчеты
 - «Точные», аналитические методы
 - «Приблизительные», численные методы
- Округление
- Программирование
 - Последовательные программы
 - Параллельные программы

Математика

- Наука, изучающая числа (количество) и фигуры (формы) и соотношения между ними
 - гр. *mathematikos* – наука, изучение
 - гр. *manthanein* – изучать
 - англ. *mind*
 - герм. *minde, munde*
 - лат. *mens, ment* – ум, память, думать

Развитие вычислительных методов

- Ручные расчеты
 - Аналитические методы
 - «Простые» численные методы
- Машинные расчеты
 - «Громоздкие» численные методы
- Параллельные вычисления
 - Численные методы, удобные для распараллеливания
 - Неудобные для ручных расчетов
 - Неоптимальные для последовательных вычислений

Задача

Сложить числа:

120,25

24,18

207,03

98,67

Округление (точность) зависит от цели:

- Точная стоимость покупки – оплата в кассе
- «Прикидка» стоимости покупок – в очереди

Содержание предмета

- Вычислительная математика изучает
 - Погрешности вычислений
 - Методы вычислений
 - Программирование вычислений

Параллельные вычисления

Машинные вычисления

- **Последовательные**
 - Действия выполняются последовательно, одно за другим
 - на одном процессоре
- **Параллельные**
 - Действия выполняются параллельно, одновременно
 - на нескольких процессорах (ядрах)

Машинный язык

- **Пример вычисления суммы**
 - Исходный текст программы (*.pas, *.c):
$$x = a + b + c + d$$
 - Машинные команды при выполнении (*.exe):
$$x = a + b$$
$$x = x + c$$
$$x = x + d$$
- **Процессор может выполнять операции только над двумя числами**
 - Количество машинных команд соответствует количеству операций

Задача

- Параллельное вычисление суммы
 - Исходный текст программы (*.pas, *.c):
$$x = a + b + c + d + e + f + g + h$$
 - Машинные команды при выполнении (*.exe):
$$x = a + b$$
$$x = x + c$$
$$x = x + d$$
- Каждый процессор может выполнять операции только над двумя числами
 - Процессоры работают параллельно

Параллельное программирование

- При составлении параллельных программ требуется использовать
 - Стиль программирования
 - Библиотеки
 - Алгоритмы
 - Средства отладки
 - Методы анализа программ

Числа Фибоначчи

Фибоначчи

- Леонардо «Фибоначчи» Пизанский
- XII-XIII в.
- Описал последовательность, известную в Древней Индии

Числа Фибоначчи

- Последовательность чисел (ряд)

$$F_1 = 1$$

$$F_2 = 1$$

- Следующее = сумме двух предыдущих

$$F_3 = F_1 + F_2$$

$$F_4 = F_2 + F_3$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Задача

- Выписать первые 20 чисел ряда Фибоначчи

n	F_n	
1	1	
2	1	
3	...	

Задача

- Вычислить отношение соседних чисел

n	F_n	F_n / F_{n-1}
1	1	
2	1	
3	...	

Золотое сечение

Золотое сечение

- Отношение соседних чисел Фибоначчи

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi = 1,618$$

Золотое сечение

- Предел отношения соседних чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618$$

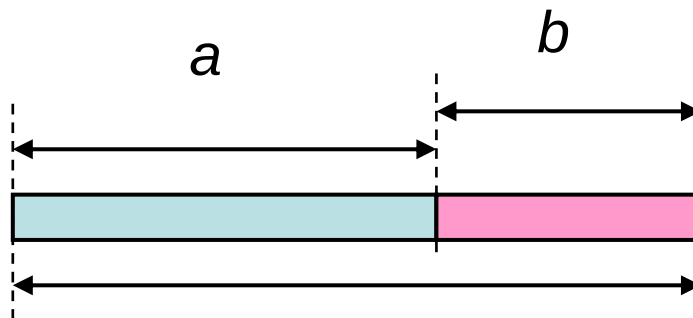
Обратная величина

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi - 1$$

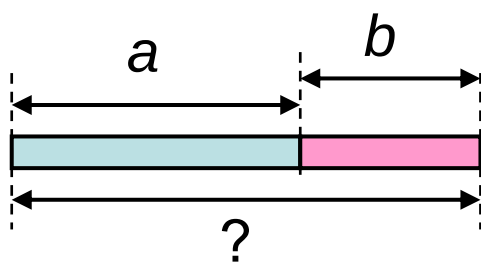
Золотая пропорция

- Деление величины на две части
- Отношение целого к большей части = отношению большей части к меньшей



Задача

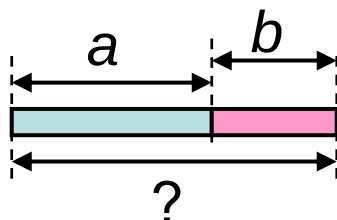
- Написать уравнение:
 - Отношение целого к большей части = отношению большей части к меньшей



$$\frac{?}{?} = \frac{?}{?}$$

Задача

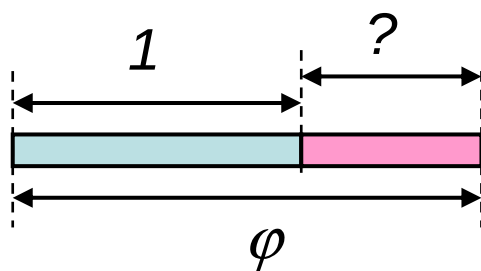
- Написать уравнение:
 - Отношение целого к большей части = отношению большей части к меньшей



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Задача

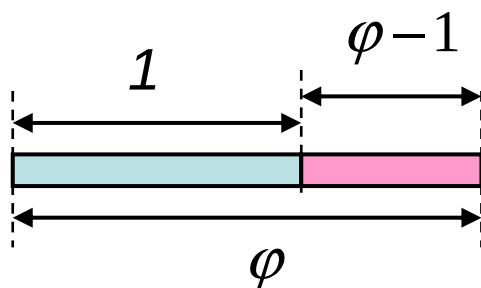
- Написать уравнение:
 - Отношение целого к большей части = отношению большей части к меньшей



$$\frac{?}{?} = \frac{?}{?}$$

Задача

- Написать уравнение:
 - Отношение целого к большей части = отношению большей части к меньшей



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Задача

- Найти решение уравнения:

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Задача

- Найти решение уравнения:

$$\varphi \cdot (\varphi - 1) = 1$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Решение квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Задача

- Найти решение уравнения:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Задача

- Положительное решение уравнения:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

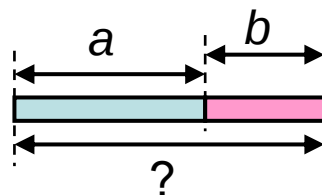
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Золотая пропорция

- Отношение соседних чисел Фибоначчи

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$$

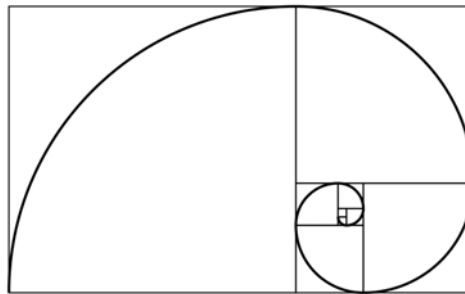
$$\frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$$



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

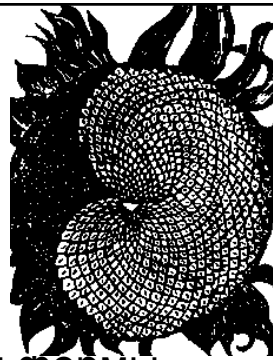
Задача

- Нарисовать прямоугольник 1: 1,618
- Отделить квадрат 1:1
- ...
- Спираль
 - Дуги в квадратах



Спираль

- Золотая спираль
- Спираль Фибоначчи
- Логарифмическая спираль
- Природа: рост без изменения формы
 - Раковина моллюска
 - Расположение листьев, плодов, семян
 - Атмосферный циклон
 - Спиральная галактика



Задача

- Вычислить квадратный корень с точностью до 6 знаков после запятой

$$\sqrt{5} = ?$$

Приближенное вычисление корня

$$\sqrt{a} = ?$$

- Начальное приближение (ближайшее подходящее значение)

$$\sqrt{a} \approx x_1$$

- Следующее приближение

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{a}{x_1}}{2}$$

- Продолжаем до заданной точности

$$|x_2 - x_1| \leq \Delta$$

Рекуррентная формула

- Рекуррентная формула выражает каждый член последовательности через несколько предыдущих членов:
 - Числа Фибоначчи
 - Приближенное вычисление корня
- Рекурсивная функция в своей записи содержит себя же
- Рекурсия —повторения «самоподобным» способом. Определяемая функция применена в теле своего же собственного определения.
- Рекуррентный –
- **лат. *recursio*** — возвращение

Итерация

- Один шаг цикла
- Повторение действия
- Этап вычислений, результаты которого используются следующим этапом
 - лат. *iteratio* — повторяю

Задача

- Вычислить золотое сечение с точностью до 6 знаков после запятой

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = ?$$

Задача

- Вычислить обратную величину золотого сечения с точностью до 6 знаков после запятой

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = ?$$

Задача

- Проверить соотношение

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

Применение

- Числа Фибоначчи и золотое сечение
 - Вычислительные методы
 - Устройство компьютера
 - Финансы
 - Искусство
 - Архитектура
 - Фотография
 - ...

Вычислительная математика

- Приближенные вычисления
- Погрешности вычислений
- Методы вычислений
- Технологии программирования